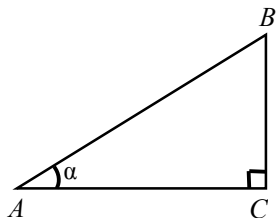


Тригонометрические тождества. Примеры, доказательства

$\triangle ABC$ – прямоугольный,
 $\angle C$ – прямой,
 BC – катет, противолежащий углу α ,
 AC – катет, прилежащий углу α .

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Разделим синус угла α на косинус угла α :

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}, \cos \alpha \neq 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый угол.}$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{BC}.$$

Разделим косинус угла α на синус угла α :

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{AC}{AB} : \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}, \sin \alpha \neq 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый угол.}$$

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы этих углов равны.

$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$ – основное тригонометрическое тождество, докажем его для острого угла прямоугольного треугольника.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} \stackrel{\text{по теореме Пифагора}}{=} \frac{AB^2}{AB^2} = 1, \\ \text{т.е. } \boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}.$$

Умножим тангенс угла α на котангенс угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1}, \cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый угол.}$$

Из формулы $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ непосредственно вытекают следующие формулы:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}}; \quad \boxed{\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}.$$

Разделим левую и правую часть основного тригонометрического тождества на $\cos^2 \alpha \neq 0$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \cos^2 \alpha \neq 0, \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

Разделим левую и правую часть основного тригонометрического тождества на $\sin^2 \alpha \neq 0$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad | : \sin^2 \alpha \neq 0, \\ \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$$